

### 3. INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

#### 3.1. Integrales dobles sobre rectángulos

##### Teorema de Fubini en el plano

Sean  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  y  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada e integrable sobre  $R$ , y supongamos que para cada  $x \in [a, b]$  existe la integral

$$J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Entonces también existe la integral de  $J(x)$  sobre  $[a, b]$  y se cumple que

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b J(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

##### Observaciones

1. Para evitar grandes paréntesis, se suele representar

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

entendiendo esta última expresión como que en primer lugar se hace la integral de  $f$  respecto de  $y$  entre  $c$  y  $d$ , y después, el resultado obtenido se integra respecto de  $x$  entre  $a$  y  $b$ .

2. En el teorema de Fubini se pueden invertir las variables y resulta que

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

cuando existen todas las integrales implicadas.

3. La integral doble de cualquier función continua  $f$  sobre  $R = [a, b] \times [c, d]$  existe y se puede hallar por integrales iteradas en cualquier orden, puesto que además de existir la integral doble, también existen las todas las integrales simples.

##### Ejemplos

1. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = x \sin y - ye^x$  sobre el rectángulo  $R = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$ .
2. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = \sqrt{|y - x^2|}$  sobre  $R = [-1, 1] \times [0, 2]$ .

##### Interpretación geométrica de la integral doble

Sean  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  y  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y positiva:  $f(x, y) \geq 0$ , para todo  $(x, y) \in R$ . Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  el recinto comprendido sobre el rectángulo  $R$  entre el plano  $z = 0$  y la superficie  $z = f(x, y)$ , es decir:

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in R \text{ y } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Para cada  $x \in [a, b]$ , la integral  $J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  es el área de la sección producida en  $\Omega$  al cortar por el plano paralelo a  $YZ$  con abscisa  $x$  y, por el **principio de Cavalieri**, la integral  $\int_a^b J(x) dx$  es el volumen de  $\Omega$ . En consecuencia:

$$V(\Omega) = \iint_R f(x, y) dx dy$$

## Ejemplo

Halla el volumen del recinto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  limitado sobre el rectángulo  $R = [1, 2] \times [0, 1]$  entre los planos  $z = 0$  y  $z = 1 + 2x + 3y$ .

## Ejercicios

1. Sea  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 2y & , \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . Demuestra que existe la integral iterada  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ , pero que  $f$  no es integrable en  $[0, 1]^2$ .
2. Demuestra que si  $f$  y  $g$  son funciones continuas sobre  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , respectivamente, y  $R = [a, b] \times [c, d]$ , entonces:

$$\iint_R f(x)g(y) dx dy = \left( \int_a^b f(x) dx \right) \left( \int_c^d g(y) dy \right)$$

3. Calcula la integral de  $f(x, y) = ye^{xy}$  sobre el rectángulo  $R = [0, 1]^2$ .
4. Calcula el volumen de la región ubicada sobre el rectángulo  $R = [0, 1]^2$  y bajo la gráfica de  $z = xy$ .
5. Calcula el volumen de la región limitada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 1$  e  $y = 1$ , y la superficie  $z = x^2 + y^4$ .

## Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. Las integrales iteradas dan 1, y la función no es integrable porque el conjunto de discontinuidades no tiene medida nula.
2. Aplica Fubini, y utiliza que las constantes salen fuera de la integral.
3.  $e - 2$ .
4.  $1/4$ .
5.  $8/15$ .